Radford, L. (2021). O ensino-aprendizagem da ágebra na teoria da objetivação. In V. Moretti & L. Radford (Eds.), *Pensamento algébrico nos anos iniciais: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural* (pp. 171-195). Livraria da Física.

La enseñanza-aprendizaje del álgebra en la Teoría de la Objetivación

Luis Radford (Laurentian University)

Introducción[1]

Desde hace algún tiempo, se han hecho esfuerzos por introducir algunos elementos de álgebra en la escuela primaria. Mientras que antes aprender aritmética se presentaba como un prerrequisito para aprender álgebra, esta posición curricular ha sido puesta en tela de juicio por el movimiento conocido como "álgebra temprana" (*early algebra*). Al mismo tiempo han emergido nuevas preguntas. Por ejemplo, si el aprendizaje de la aritmética no es un prerrequisito para el aprendizaje del álgebra, ¿por dónde empezar? ¿Cuál es la relación entre pensamiento aritmético y algebraico?

En la primera parte del capítulo, discuto brevemente la cuestión del pensamiento algebraico y hago un esbozo de algunos resultados a los que hemos llegado en nuestras investigaciones respecto a la generalización de secuencias. La segunda parte gira en torno a la enseñanza-aprendizaje de ecuaciones. Los episodios que discuto en esta segunda parte nos permiten mostrar la ruta que hemos seguido en la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones en los años iniciales. Los episodios ilustran, al mismo tiempo, lo que entendemos en la teoría de la objetivación por aprendizaje como un *encuentro colectivo* con las matemáticas.

La naturaleza del pensamiento algebraico

Tratar de entender la naturaleza del pensamiento algebraico supone una posición epistemológica. Dada la orientación histórico-cultural de la teoría de la objetivación, no es sorprendente que nuestra posición epistemológica sea de corte histórico. Sin embargo, no se trata de recurrir a la historia con el fin de describir formalmente las etapas del desarrollo del pensamiento algebraico. Se trata de ver el pensamiento algebraico en su movimiento contextual, como respuesta a problemas que se plantearon dentro de las actividades socioculturales y concretas donde emergió y se

[1] Este artículo es resultado de un proyecto de investigación subvencionado por The Social Sciences and Humanities Research Council of Canada / Le Conseil de Recherches en Sciences Humaines du Canada (SSHRC/CRSH).

desarrolló. Ahora bien, ¿cómo distinguir el pensamiento algebraico de otros tipos de pensamiento matemático? ¿Cómo definir aquello que lo *caracteriza* y que sería lo que precisamente deberíamos rastrear en su movimiento histórico? No hay una sola respuesta a esta pregunta. Por ejemplo, en su propuesta curricular, Vasily V. Davydov elaboró una respuesta muy diferente a la nuestra. En el contexto de un proyecto más amplio de restructuración del programa de estudios de la Unión Soviética, inspirada en la visión de la matemática de su tiempo, la matemática moderna, Davydov buscó organizar la enseñanza alrededor de los "conceptos de 'relación y estructura'" (1975a, p. 101), orientándola al desarrollo de lo que en ese tiempo se consideró la cúspide de la cognición humana: el pensamiento teórico (Radford, 2021a). Siguió los consejos del matemático bourbakista Jean Dieudonné, que decía que "hay que mostrar abiertamente al niño la esencia abstracta del álgebra y desarrollar su capacidad de abstracción y poder teórico" (citado en Davydov, 1975a, p. 109); siguió también los pasos de A. N. Kolmogorov, que afirmaba que "Toda la estructura del álgebra escolar y todo el análisis matemático puede erigirse sobre el concepto de número real" (citado en Davydov, 1975b, p. 110). De esta manera Davydov concluyó que "El paso de los números enteros a los números reales es un paso de la aritmética al 'álgebra'" (1975b, p. 113). Es así que la respuesta de Davydov gira en torno al concepto de magnitud (Panossian, de Sousa y de Moura, 2016) y que vio en el paso de la fracción al número real el paso de la aritmética al álgebra. De allí que, como nos recuerda Ivashova, en el programa educativo de Davydov: "Se daba primacía al estudio de las magnitudes que, mediante la comparación y la medición práctica, daban lugar al número; [su programa] hacía uso de una notación generalizada para describir las relaciones de las magnitudes" (Ivashova, 2011, p. 59).

Aunque la vía explorada por Davydov es sin duda interesante, nuestra respuesta a la pregunta sobre aquello que caracteriza al pensamiento algebraico va por otro camino. Desde la perspectiva de la teoría de la objetivación, la característica del pensamiento algebraico no se encuentra solo en la naturaleza de la magnitud (es decir, en la naturaleza del *objeto* sobre el que se razona) sino, también, en el tipo de *razonamiento* que se hace con las magnitudes. De manera más precisa, en nuestra perspectiva, tres condiciones caracterizarían al pensamiento algebraico: la primera tiene que ver con los *objetos* del razonamiento; la segunda con la manera en que los objetos son *simbolizados* (se trata, entonces, de un problema semiótico) y la tercera sobre cómo se *razona* sobre los objetos del razonamiento. Veamos estas condiciones de manera más

detallada:

(1) *Indeterminación de magnitudes*: el problema sobre el que se razona implica magnitudes no conocidas o no determinadas. Estas pueden ser incógnitas, variables, parámetros, etc.

(2) *Denotación*: las magnitudes indeterminadas que intervienen en el problema tienen que ser nombrados o simbolizados. Ahora bien, esta simbolización puede llevarse a cabo de varias maneras. Se pueden utilizar signos alfanuméricos, pero no necesariamente. La denotación de cantidades indeterminadas también puede simbolizarse mediante el lenguaje natural, gestos, signos no convencionales, o incluso una mezcla de ellos.

(3) Analiticidad: el razonamiento

(α) incluye las magnitudes determinadas e indeterminadas

(β) opera deductivamente

El hecho de que al pensar algebraicamente el estudiante incluya en su razonamiento tantas magnitudes determinadas e indeterminadas quiere decir que establece *relaciones* entre esos dos tipos de magnitudes. Quiere decir, también, que trata a las magnitudes desconocidas como si fueran conocidas. Es decir, aunque no las conozca, opera con ellas como si las conociera, por ejemplo, las suma, las resta, las multiplica, las divide con otras magnitudes. Esta operatividad requiere una reconceptualización de las *operaciones* involucradas. Así, la suma "+" en la expresión 2+3 ya no es la misma que en la expresión 2+x. Lo mismo podemos decir de la relación de igualdad "=".

Y, que el pensamiento algebraico opere de forma deductiva quiere decir que, en su movimiento, deduce predicados, pasa *deductivamente* de un predicado P(x) a un predicado Q(x). Esto constituye una de sus fuerzas más importantes, por ejemplo, ¿cómo sabemos que la ecuación P(x)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

tiene a lo sumo dos soluciones dadas por la siguiente fórmula Q(x)?

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

No porque adivinamos, sino porque lo *dedujimos*. Esta idea de analiticidad, como movimiento de lo dado (la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$) a lo buscado (sus soluciones) el antiguo matemático griego Pappus lo llamaba *análisis* (Rideout 2008).

Hay dos consecuencias que derivan de las consideraciones anteriores y que discuto a

continuación.

Dos consecuencias

1. El uso del simbolismo alfanumérico no caracteriza al pensamiento algebraico

Nuestra concepción del pensamiento algebraico se distingue de las corrientes contemporáneas que asimilan el pensamiento algebraico al pensamiento simbólico alfanumérico. Por ejemplo, a menudo se considera que la solución a la ecuación $2x + 2 = 10$ exige de forma automática un razonamiento algebraico, ya que la ecuación incluye el uso de letras, independientemente de las especificidades del razonamiento que sigue el estudiante. Sin embargo, como hemos notado a menudo en nuestra investigación en la escuela, muchas veces los estudiantes proceden por ensayo y error: substituyen el valor de x por 1, luego por 2, etc., hasta encontrar el valor x = 4 que vuelve a la igualdad verdadera. Este método de ensayo y error satisface la primera y la segunda condición de nuestra caracterización del pensamiento algebraico, pero no satisface la tercera condición: el razonamiento seguido no es deductivo. Dentro de nuestra caracterización del pensamiento algebraico, esta manera de pensar y resolver el problema no es algebraica: es *aritmética*. El uso de letras no es exclusivo del pensamiento algebraico. Históricamente hablando, el nacimiento del álgebra no es el nacimiento de su simbolismo moderno. En sus *Elementos*, Euclides recurrió a las letras sin movilizar ideas algebraicas (Unguru, 1975). Los antiguos matemáticos chinos movilizaron ideas algebraicas para resolver sistemas de ecuaciones *sin utilizar el simbolismo alfanumérico*. En un artículo anterior mencioné: "el uso de las letras en el álgebra no es una condición necesaria ni suficiente para pensar algebraicamente" (Radford, 2014, p. 260).

2. El álgebra no es una aritmética generalizada

Nuestra concepción del pensamiento algebraico se distingue también de aquellas que ven en el álgebra una aritmética generalizada. Es claro que hay una relación importante entre el pensamiento aritmético y el algebraico. Es también claro que una parte de esa relación puede ser de comprendida en términos de generalizaciones, pero me parece que no es posible extraer toda el álgebra escolar de la aritmética. Hay, en ciertos puntos, *rupturas epistemológicas*. El trabajo pionero de Filloy y Rojano (1989) describe precisamente una de esas rupturas que llamaron *corte didáctico*. Este corte se observó en estudios clínicos en los que los estudiantes se enfrentaban a ecuaciones de

la forma Ax+B = Cx+D. Para resolver ecuaciones de esta forma, los métodos aritméticos "de inversión de operaciones" —que son eficaces para resolver ecuaciones del tipo Ax+B=D (los alumnos suelen restar B a D y dividir por A)— ya no son aplicables. Los alumnos tienen que recurrir a una idea verdaderamente algebraica: operar *deductivamente* sobre la incógnita. Para operar sobre la incógnita o sobre magnitudes indeterminadas en general (por ejemplo, variables o parámetros), hay que pensar analíticamente. Es decir, hay que considerar las cantidades indeterminadas como si fueran algo conocido, como si fueran números concretos (véase, por ejemplo, Kieran, 1989; 1990; Filloy, Rojano y Puig, 2007). Desde un punto de vista genético, esta forma de pensar analíticamente —donde los números desconocidos se tratan igual que los números conocidos— distingue la aritmética del álgebra. Y esto es tan característico del álgebra que el matemático francés François Viète (uno de los fundadores del álgebra simbólica moderna) identificó el álgebra no como un arte de uso de símbolos sino como un arte *analítico* (Viète, 1983). Esta manera analítica de pensar la resolución de la ecuación Ax+B = Cx+D *no* es el resultado de una generalización de la manera de resolver la ecuación Ax+B=D por inversión de constantes o por ensayo y error. La manera *analítica* de pensar la resolución de la ecuación Ax+B = Cx+D requiere una ruptura epistemológica respecto al pensamiento aritmético en el en el sentido en que en el pensamiento algébrico se opera sobre/con las incógnitas y se considera la igualdad bajo una nueva mirada: una mirada *relacional*.

En las siguientes secciones ilustro el pensamiento algebraico en dos dominios matemáticos: el de las ecuaciones y la generalización de secuencias (*pattern generalization*).

Generalización de secuencias

La generalización de secuencias es uno de los contextos que han sido explorados con más detenimiento en la investigación en el campo del álgebra temprana. Normalmente, se presenta a los estudiantes un numero finito de términos de una sucesión figural (es decir, una sucesión constituida de "figuras" hecha de objetos como círculos o cuadrados) o numérica (es decir, una sucesión constituida de números) y se les pide encontrar el valor de los términos siguientes, de términos remotos e incluso el término general (el término *n*) de la secuencia. Por ejemplo, en una de nuestras primeras investigaciones, dimos a estudiantes de 7 y 8 años la secuencia que aparece en la Figura 1.

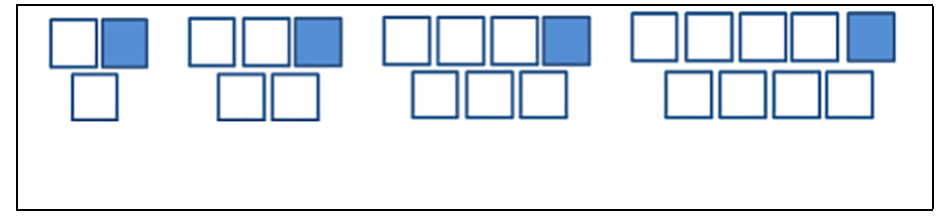


Figura 1. Los primeros cuatro términos de una secuencia figural.

Fuente: Radford (2021b, p. 117).

Fue una gran sorpresa para nosotros cuando los estudiantes dibujaron los términos 5 y 6, y vimos que no necesariamente lo hacían respetando la estructura espacial. La Figura 2 presenta un ejemplo.

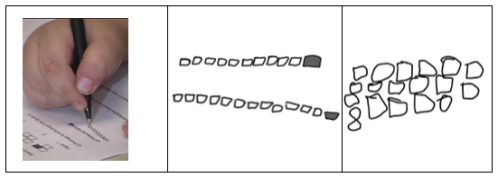


Figura 2. Los términos 5, 6 y 8 de la secuencia.

Fuente: Radford (2021b, p. 118).

Los estudiantes se centran en la numerosidad y se dan cuenta que entre un término y el siguiente hay dos cuadrados de diferencia. En otras palabras, obtienen una relación "de recurrencia" en la que, para encontrar el siguiente término, es necesario conocer el anterior. En general, los estudiantes jóvenes no enuncian necesariamente la relación de recurrencia de forma verbal. La relación de recurrencia aparece a la consciencia a través de conteos de los términos y de una actividad perceptual; es decir, aparece a la consciencia de manera corporal. Aunque interesante, para los estudiantes jóvenes resulta difícil partir de esta relación de recurrencia para encontrar el valor de términos remotos, como el término 25 o 100, por ejemplo. Dicho procedimiento llevaría a transformar una adición repetida en multiplicación, lo que a menudo no está al alcance conceptual del estudiante joven.

Una de las generalizaciones que hemos encontrado frecuentemente consiste en decir que, para obtener el valor del término 25, se hace lo siguiente: "3 + 2 + 2 hasta llegar al final." El estudiante que dice esto ha hecho una generalización, pero no es de tipo algebraico, sino de tipo aritmético. Al responder a la pregunta ¿cuántos cuadrados hay en el término 4, 5, 6, etc.? El estudiante se da cuenta que está ante una magnitud indeterminada (en este caso, la *variable* "número de la posición del término en la

secuencia" o "rango del término"). Sin embargo, esta variable no llega a ser *denotada* y no satisface así la segunda condición que dimos de pensamiento algebraico.

Veamos ahora otro ejemplo. Para obtener el valor de un término remoto (por ejemplo, el término 25), algunos estudiantes efectúan la suma que sigue: 9+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 = 51. Parten del valor del término 4 (que es 9) y añaden 2 veintiuna veces, es decir, tantas veces como la diferencia entre el rango del termino buscado (término 25) y el término 4 (25-4 = 21). ¿Es esta una generalización que podemos llamar algebraica? El primer criterio está satisfecho, sin embargo, el segundo no: los estudiantes introducen una variable "auxiliar": la variable "número de veces que se suma 2", pero aparece más bien como un *artificio heurístico*; esta nueva variable no alcanza a ser *denotada*. Estamos, entonces, no ante una generalización algebraica sino una generalización aritmética muy sofisticada. Si, por el contrario, los estudiantes dijesen algo como "sumas dos tantas veces como el rango del término que buscas menos 4" se realizaría la denotación de la nueva variable auxiliar. En el caso de estudiantes más avanzados, la denotación podría escribirse como $(n-4)\times 2$; aparecería así en la expresión que da el valor del término buscado una *covariación* entre el valor de dicho término y su rango.

En otros casos, hemos visto a los estudiantes aprovechar la *forma* de la figura para obtener la generalización algebraica. Por ejemplo, en Radford (2013; 2021b) se pone en evidencia la labor conjunta entre una maestra y un grupo de estudiantes que los lleva a que los términos *puedan* ser percibidos como si formaran dos filas, la de arriba y la de abajo. Esta aproximación al problema lleva a identificar dos relaciones funcionales o relaciones de covariación entre las variables: por un lado, entre "rango del término" y "el número de cuadrados en la fila de abajo"; por otro lado, entre "rango del término" y "el número de cuadrados en la fila de arriba." Cuan la ayuda de la maestra, los estudiantes toman consciencia que el número de cuadrados en la fila de abajo de cualquier término es el mismo que el número (o rango) del término, es decir de la relación que en símbolos escribiríamos como $n \mapsto n$. En el caso de la fila de arriba, los estudiantes se dan cuenta de que en esa fila hay uno más que el número del término, es decir, de la relación que escribiríamos en símbolos como $n \mapsto n+1$. En otras palabras, los estudiantes toman conciencia de las relaciones $n \mapsto n; n \mapsto n+1$, que llevan a la relación funcional $n \mapsto 2n+1$.

En Radford (2013) propuse el siguiente modelo para la generalización de secuencias.

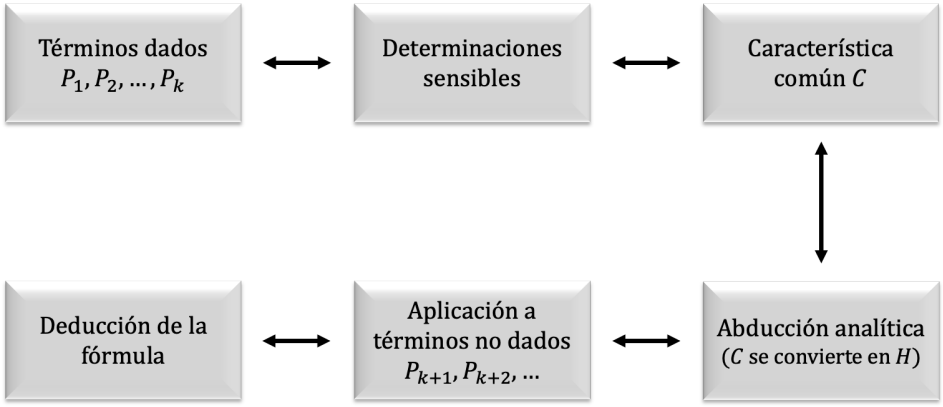


Figura 3. Estructura de la generalización algebraica de secuencias.
Fuente: Radford (2013, p. 7).

Los estudiantes empiezan por escoger de manera perceptual y conceptual: entre todo lo que aparece en el campo perceptual de los estudiantes ciertos elementos son elegidos. De esta elección resulta lo que llamo "determinaciones sensibles", por ejemplo, detenerse en la *relación de recurrencia* entre términos consecutivos o detenerse en las *filas* de los términos, son dos determinaciones sensibles diferentes; son dos maneras diferentes de ver los términos de la secuencia. En el primer caso la atención se centra en las cantidades; en la segunda, la atención se centra en la forma de los términos. De estas determinaciones resulta una *característica común* percibida a partir de un número finito de términos. Enseguida, esa característica "común" es *generalizada* a los otros términos de la secuencia. La generalización de la característica común (que puede ser una o varias) corresponde a lo que Peirce llamó *abducción* (*abduction*), esto es, algo que solo es plausible (Peirce, 1958, CP 2.270). Según el uso de esta abducción, la generalización podrá tomar varios cursos. Cuando la abducción es utilizada simplemente para pasar de un término al otro (como cuando los alumnos dicen que hay que añadir 2 cuadrados), llegamos a una generalización aritmética. En este caso, no hay *deducción* de una expresión directa que permita calcular el número de cuadrados en cualquier término de la secuencia. La abducción permite generar un procedimiento, pero no una expresión directa, en otras palabras, una *fórmula*.

En el caso del procedimiento por ensayo y error, los alumnos producen una fórmula. Pero la fórmula no es deducida. De hecho, la abducción concierne la fórmula misma. Los alumnos proponen una fórmula, que parece plausible, y la someten a un número finito de pruebas. Esta generalización (que corresponde a una de las formas de inducción) no es todavía algebraica; para que lo sea, se requiere, de acuerdo con lo

expuesto, que la abducción que se hace de la característica común sea utilizada de manera analítica. Esto quiere decir que la abducción será utilizada ya no como simple posibilidad, sino como principio asumido para *deducir* una fórmula que proporciona el valor de cualquier término (Radford, 2013).

Tres estratos de generalización algebraica

Un estudio de los medios semióticos de objetivación que emplean los estudiantes permite distinguir tres niveles o estratos de generalización algebraica[2]. En el primero, la formula del término general o de términos remotos no está basada en signos alfanuméricos; la fórmula aparece en acciones que se ejecutan sobre números concretos. Las variables funcionales aparecen por medio de algunos de sus valores, a través de los cuales se expresa la generalidad. Este es el tipo de generalización factual, en el sentido de que lo general se expresa a través de lo singular, (*a fact*, en inglés). Un ejemplo: "el valor del término 10 es 10 más 10 más 1"; "El valor del término 25 es 25 más 25 más 1," etc. La generalización factual es una generalización de acciones en la forma de un arquetipo operacional: una fórmula. La formula permanece ligada al nivel concreto (por ejemplo: "10 más 10 más 1") y permite a los alumnos abordar con éxito prácticamente cualquier caso *particular*.

Otro tipo de generalización algebraica es la generalización *contextual*. En este caso, los estudiantes apoyan su razonamiento en índices contextuales. Por ejemplo, cuando los estudiantes abordaron la pregunta en la que debían explicar a un estudiante de otra clase cómo saber cuántos cuadrados tiene el término 15 sin dibujar el término, varios estudiantes dijeron "15 abajo y 16 arriba." En la generalización contextual, los índices contextuales (como *la fila de abajo* o *la fila de arriba*) organizan implícitamente la fórmula; en vez de números específicos, los índices contextuales son mencionados explícitamente, y se alcanza así un nivel de generalidad diferente al de la generalización factual.

En la generalización *simbólica*, las variables son expresadas a través de símbolos arbitrarios (alfanuméricos, por ejemplo, aunque no necesariamente). Por ejemplo, el valor del término general puede ser expresado como "___ + ___ + 1" o "$2 \times __ + 1 = __$" (ver Radford, 2012) o $2n + 1$. Nótese que hay una gran diferencia entre la primera

[2] Los medios semióticos de objetivación son aquellos recursos a través de los cuales los estudiantes toman conciencia de los significados matemático-culturales en juego; dichos medios semióticos incluyen el lenguaje y su prosodia y signos en general, así como los artefactos y la actividad material llevada a cabo con ellos y la actividad corporal, por ejemplo, la actividad perceptual, los gestos y las acciones.

expresión y las otras dos. En la primera, el primer signo "___" opera *indexicalmente*: está apuntando hacia la fila de abajo y el segundo signo "___" apunta hacia la fila de arriba (por eso decimos que opera indexicalmente). En las otras dos, se hace abstracción de las filas y el signo pasa de ser *índice* o *index* a ser *símbolo propiamente dicho*. De hecho, un paso importante en el desarrollo ontogénico del pensamiento algebraico del estudiante va a ser ese paso de la denotación como índice a la denotación como símbolo sin amarres contextuales.

Ecuaciones

Desde mi punto de vista, las ecuaciones no han despertado todavía el interés que merecen en el álgebra temprana y queda mucho por aprender. En esta sección, mi objetivo es presentar algunos pasajes de una actividad de enseñanza-aprendizaje (labor conjunta) que ilustran ciertos aspectos de la manera en que los estudiantes encuentran una forma histórica-cultural de pensar las ecuaciones. La actividad de enseñanza-aprendizaje que voy a discutir ocurre en una clase de 5º grado (estudiantes de 10 y 11 años). Es una clase con la que hemos venido trabajando durante 4 años en el marco de un programa de investigación longitudinal. En los años anteriores, los estudiantes habían encontrado de forma progresiva la forma algebraica de pensar las ecuaciones a través de dos sistemas semióticos elementales:

a) el "sistema semiótico concreto" (SSC), constituido de objetos materiales: *sobres* de papel que contienen cada uno el mismo número desconocido de tarjetas de cartón, *tarjetas* de cartón, y el *signo igual* (para un ejemplo, ver Figura 4, derecha), y

b) el "sistema semiótico icónico" (SSI), que remplaza los objetos concretos con imágenes icónicas dibujadas { , , = } (para un ejemplo ver Figura 5, imagen 1).

En los grados 2 y 3, con ayuda primero del SSC y luego del SSI y de un trabajo conjunto con la profesora —orientado por formas colectivas de producción de saberes y una ética comunitaria— los estudiantes se familiarizaron con la traducción de problemas sencillos presentados en lenguaje natural a ser resueltos por medios algebraicos. El primer contacto con las ecuaciones es descrito en Radford (2017), en un pasaje en el que la profesora discute el siguiente problema con los estudiantes (entonces estaban en 2º grado, cuando tenían 7 y 8 años):

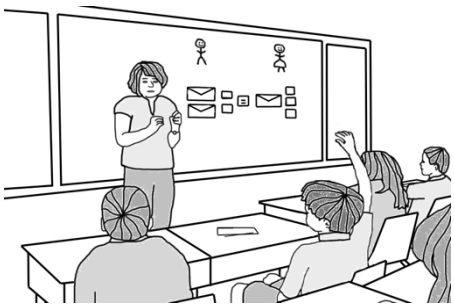
Sylvain y Chantal tienen tarjetas de hockey. Chantal tiene tres tarjetas y Sylvain tiene dos tarjetas. Su madre mete algunas tarjetas en tres sobres y se asegura de meter la misma cantidad de tarjetas en cada sobre. Ella le da un sobre a Chantal y dos a Sylvain. Ahora, los dos niños tienen la misma cantidad de tarjetas de hockey. ¿Cuántas tarjetas de hockey hay dentro en un sobre?	

Figura 4. Izquierda: el problema a resolver. Derecha: la profesora discute con los estudiantes.

Fuente: Radford (2017).

Al discutir con la profesora, los estudiantes toman conciencia de que el problema puede traducirse en el SSC como se muestra a la derecha de la figura 4 (los sobres de papel, las tarjetas de cartón y el cartón del signo igual estaban pegados con cinta adhesiva al pizarrón). Aunque al principio los estudiantes utilizan procedimientos de ensayo y error, asignando números de tarjetas a los sobres, luego se dan cuenta de que pueden quitar un sobre de cada lado de la ecuación y que pueden también quitar dos tarjetas de cada lado de la ecuación, logrando así "aislar un sobre" al mismo tiempo que mantienen la igualdad. Esta forma de pensar y proceder satisface las condiciones enunciadas acerca del pensamiento algebraico: a) la indeterminación aparece en el número desconocido de tarjetas en el sobre (es la *incógnita*); b) La incógnita o magnitud indeterminada es *denotada* a través del sobre dentro del sistema SSC y c), el resultado es *deducido*: en cada sobre hay una tarjeta.

En Grado 4º se empezó a utilizar el sistema semiótico alfanumérico (SSA). La profesora (que era diferente cada año) y los estudiantes trabajaron sobre la articulación iniciada el año anterior entre los sistemas semióticos SSI y SSA, resolviendo los mismos problemas tanto en el SSI como en el SSA. En Grado 5º, se buscaba que los estudiantes se familiarizaran más con el SSA y llegaran a plantear y resolver ecuaciones abstractas (es decir, sin contexto) dentro de ese sistema semiótico.

De acuerdo con las pautas de la teoría de la objetivación, durante las lecciones, se fomentó la naturaleza *colectiva* del aprendizaje a través de trabajos en pequeños grupos, discusiones entre grupos y discusiones generales. En la Figura 5, vemos

momentos de una discusión colectiva en la que los estudiantes pasan al pizarrón y tienen oportunidad de intercambiar ideas acerca de los caminos seguidos en las soluciones de ecuaciones planteadas en una tarea que hicieron de forma individual, en casa, la noche anterior. La Figura 5 muestra tres métodos de resolución de la ecuación $7n + 2 = 6n + 8$.

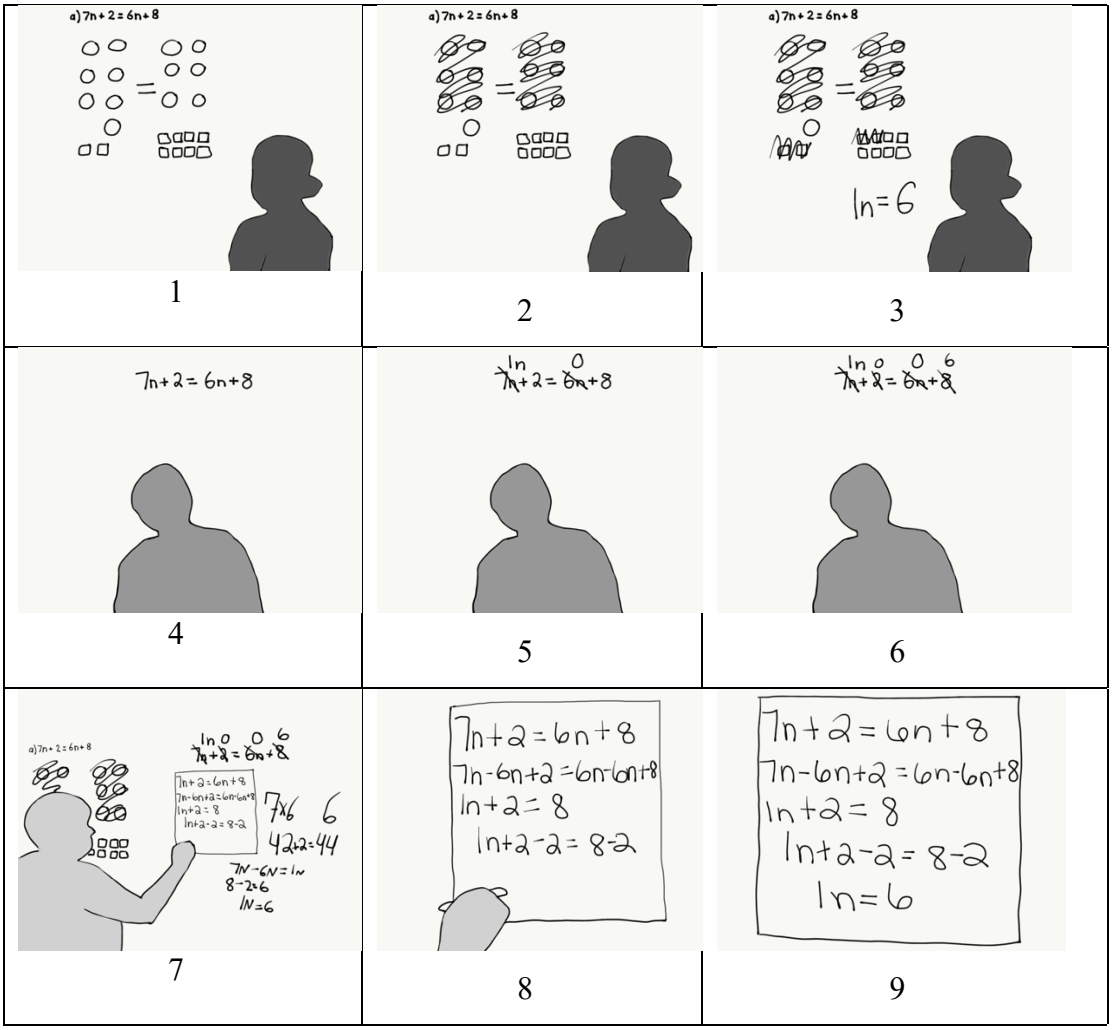


Figura 5. Discusión general en el pizarrón acerca de la solución de 7n + 2 = 6n + 8. Fuente: archivo del autor.

Arriba, en la primera fila vemos la primera solución. Primero, la estudiante traduce la ecuación del SSA al SSI. La estudiante dibuja el lado izquierdo de la ecuación: 7 círculos (que representan los 7 sobres) y dos rectángulos (que representan las dos tarjetas); luego dibuja el lado derecho de la ecuación: 6 sobres (los 6 círculos) y 8 tarjetas (los 8 rectángulos) (ver bosquejo 1). Luego, procede a eliminar 6 sobres de cada lado de la ecuación (ver bosquejo 2); enseguida elimina dos tarjetas de cada lado de la ecuación, y concluye deductiva o analíticamente que $1n = 6$ (ver bosquejo 3). En la fila

del medio de la Figura 5, se ve la solución de un estudiante. La solución no recurre al SSI; es llevada a cabo en el SSA. Escribe primero la ecuación (ver bosquejo 4); luego, elimina 6n de cada lado de la ecuación (y lo indica con una diagonal sobre los términos 7n y 6n) y coloca la respuesta *encima* de los términos de la ecuación original (ver bosquejo 5). Luego resta dos de cada lado de la ecuación (tacha con una diagonal los términos afectados) y coloca las *respuestas* encima, que muestran que 1n = 6 (ver bosquejo 6).

Evidentemente, es poco factible que los estudiantes reinventen la sintaxis algebraica. La profesora aprovecha entonces para mostrar *otra* manera de escribir y razonar los cálculos, que va a llamar "la manera larga", porque deja paso a paso las trazas de los cálculos en líneas *diferentes* que se organizan *de arriba hacia abajo*. En la Figura 5 (bosquejo 7), vemos, en efecto, que la profesora escribe la ecuación en la primera línea; luego, en la segunda línea, escribe $7n - 6n + 2 = 6n - 6n + 8$, explica verbalmente que ha restado $6n$ a cada lado de la ecuación. En la tercera línea, escribe los resultados: escribe $1n + 2 = 8$. Luego, en la cuarta línea, resta 2 de cada lado de la ecuación, y escribe: $1n + 2 - 2 = 8 - 2$. La última línea del bosquejo 7 muestra el momento en que la profesora efectúa las operaciones, lo que daría $1n = 6$. El bosquejo 8 presenta un zoom de los cálculos de la profesora. El bosquejo 9 presenta todos los cálculos.

Cabe destacar que la profesora escribe su procedimiento *sin* borrar el de los estudiantes, y es que el de la profesora no tiene tales pretensiones; se trata de ofrecer a los estudiantes *otra* manera de pensar la sintaxis algebraica. De hecho, hubo estudiantes que siguieron la manera larga, mientras otros siguieron otros rumbos. Lo que hay que entender es que, en la teoría de la objetivación, el espacio de discusión colectivo no es un sitio para que los estudiantes o la profesora exhiban sus hazañas. Se trata de un sitio de crecimiento *colectivo*, de producción de una *obra común*, en el que se comparten maneras de pensar procedimientos para dar solución al problema planteado, y se asegura que los estudiantes se involucren genuinamente en las ideas de otros, es decir, que se involucren con esas ideas de manera responsable, comprendiéndolas, discutiéndolas, contestándolas o refinándolas, por ejemplo.

Luego de la discusión general, los estudiantes continuaron trabajando en pequeños grupos sobre la siguiente pregunta que habían explorado el día anterior:

> Van a escribir un texto que explique los pasos que hay que seguir para resolver una ecuación como las que vimos anteriormente. El texto está

dirigido a un alumno de 5º grado de otra escuela, y no se sabe si este alumno sabe resolver ecuaciones. Su explicación debe ser clara, justa y convincente: a. Claro: ¿se entiende lo que se dice en el texto? b. Justo: ¿es la respuesta correcta? c. Convincente: ¿son realmente convincentes los argumentos del texto?

La intensión de esta pregunta es hacer reflexionar a los estudiantes de manera *explícita*. Dado que en la teoría de la objetivación definimos el aprendizaje como *toma de conciencia*, esta reflexión es importante para asegurar una toma de conciencia conceptualmente profunda. José, que había trabajado el día anterior con otro grupo se añadió esa mañana al grupo de Elisa, Celeste y Carina. La discusión giró alrededor de lo que el texto debe incluir. José sugirió fundar la explicación en un ejemplo concreto (Figura 6, izquierda). En términos epistemológicos, José explica el *general* a través de un *singular*. El grupo de Elisa había seguido una explicación *general*, sin ejemplos (Figura 6, derecha). En este ejemplo no hay números, solamente referencia a las acciones.

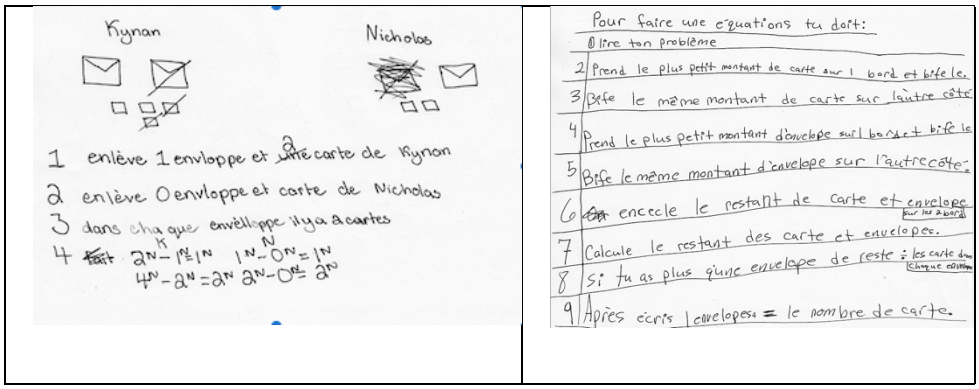


Figura 6. Izquierda: el texto de José. Derecha: el texto del grupo de Elisa.

Fuente: archivo del autor.

El texto de José dice:

1 Quita 1 sobre et 2 tarjeta[s] de Kynan

2 Quita 0 sobres et tarjeta de Nicholas

3 En cada sobre hay 2 tarjetas.

Siguen luego cálculos entre magnitudes desconocidas y conocidas.

El texto del grupo de Elisa dice:

Para hacer [resolver] una ecuación debes:

1. Leer el problema.

2. Toma el número más pequeño de tarjetas de un lado [de la ecuación] y táchalo.
3. Tacha la misma cantidad de tarjetas en el otro lado.
4. Toma el número más pequeño de sobres de un lado y táchalo.
5. Tacha la misma cantidad de sobres del otro lado.
6. Circula lo que queda de tarjetas y sobres de los dos lados.
7. Calcula [cuenta] las tarjetas y sobres que quedan.
8. Si tienes más de un sobre, ÷ [igualmente] las tarjetas en cada sobre.
9. Después escribe 1 sobre = número de tarjetas.

Estalla una discusión matemática bastante intensa.

1. Elisa: (*dirigiéndose a José*) nuestro [texto] es mejor; no tiene necesidad de ser específico a un problema.
2. José: (*defendiéndose*) a mí me parece que el tuyo [también] es específico... Como (*se refiere al texto de Elisa*), "tacha lo mismo" ¡es específico!... (ver Figura 7, izquierda)
3. Elisa: sí, [pero] "tacha lo mismo" no es específico a un problema; [en nuestro procedimiento] ¡es como hacer *todos los problemas juntos*...!
4. José: yo, yo doy un ejemplo, como...
5. Celeste: (*aprecia la idea de José*) a lo mejor deberíamos hacer un dibujito al final [del texto], ya no tengo mucho espacio, pero podría hacerlo abajo...
6. José: sí, como quita un sobre y dos tarjetas de Kynan …
7. Celeste: pero el problema es que [en] tu [texto]... es que tú pones nombres de personas de las que no sabemos nada; como ¿quién es Kynan? ¿De dónde salió Kynan? (ver Figura 7, derecha).[3]

[3] Como vemos, en la discusión los estudiantes no llegan a analizar el ejemplo que propone José. Un análisis hubiera mostrado que la ecuación propuesta no tiene solución en el conjunto de los números enteros positivos. La atención de los estudiantes se queda en lo que podemos llamar el valor epistemológico del ejemplo.

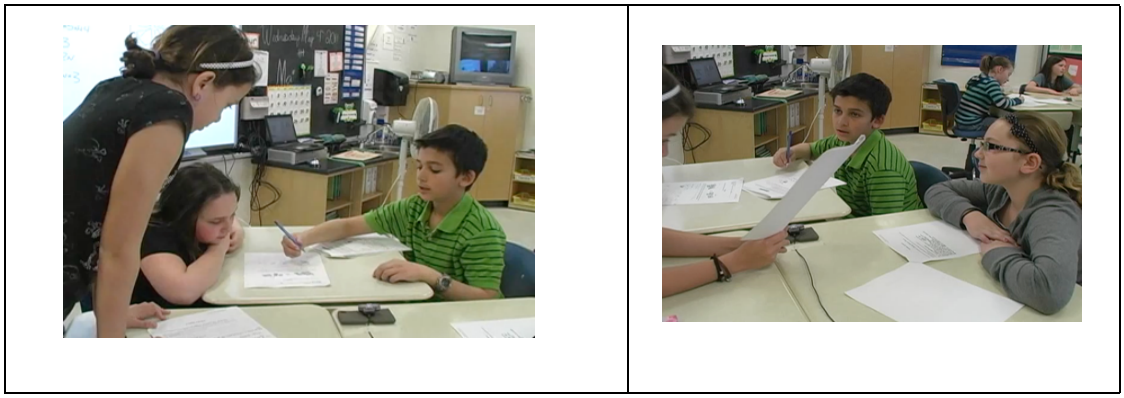


Figura 7. Los estudiantes contrastan dos textos matemáticos de generalidad diferente. Fuente: archivo del autor.

Este corto episodio nos presenta a los estudiantes embarcados en un proceso de objetivación y subjetivación. El proceso de objetivación aparece en la manera en que los estudiantes toman conciencia de lo que debe ser un texto matemático (un texto algebraico, en este caso). La pregunta es: ¿debe ponerse un ejemplo o deben enunciarse de forma general las etapas de resolución de una ecuación? En las tres primeras etapas, los estudiantes se refieren a esta diferencia mediante: "específico *versus* no específico". Al principio, el sentido no es claro. Al final de la línea 3, Elisa dice que el procedimiento que las niñas proponen: "¡es como hacer *todos los problemas juntos*...!" Elisa plantea el problema del texto como problema de generalidad. Pero junto con este proceso de objetivación ocurre un proceso de subjetivación: en efecto, los cuatro estudiantes toman posición respecto al saber y respecto a los otros. En sus respuestas, José explica y defiende su punto de vista. Las niñas lo oyen con atención y lo entienden, pero también lo objetan. Celeste reconoce que la idea de José podría ser incorporada en el texto que las niñas han elaborado. Esa idea que emerge poco a poco es parte de la obra común, obra de varias voces y perspectivas.

La lección sigue adelante. Juntos, los cuatro estudiantes, a partir del texto de Elisa, Carina y Celeste, redactan un texto que responde a la pregunta planteada en la tarea. Luego, alentados por la profesora, intercambian el texto con los estudiantes de otro grupo con el fin de aprender y de posicionarse críticamente frente al texto de los otros.

En la Figura 8 (izquierda), vemos a los estudiantes del grupo de Elisa estudiar con atención el texto del otro grupo (ver Figura 8, en el medio). El grupo de Elisa se sorprende de ver que la hoja del otro grupo tiene pocas etapas. Celeste dice: "solo tienen 4 pasos; ¡creo que podría ser un poco más largo...!" Elisa dice: "no entiendo."

José, que se siente a gusto con un texto ilustrado con un ejemplo, añade, “¡Dieron un ejemplo! Si la persona [el estudiante de 5º grado] lee el ejemplo, comprenderá el sentido”. Los estudiantes deciden escribir una crítica tomando turnos.

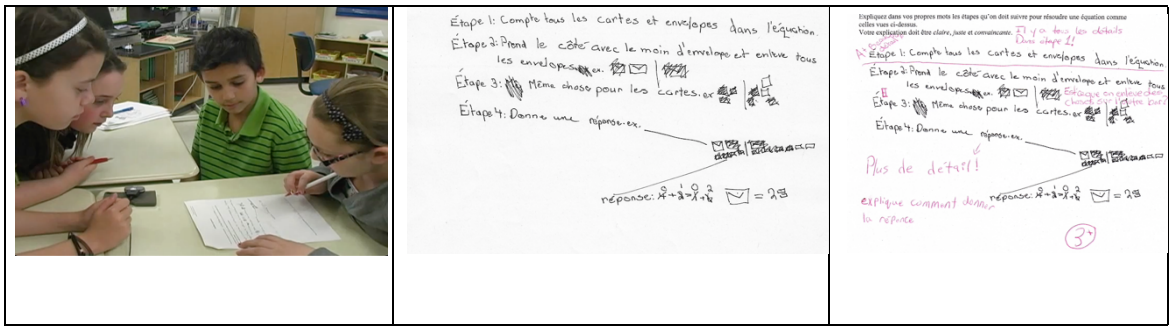


Figura 8. El grupo de Elisa lee críticamente el texto del otro grupo.
Fuente: archivo del autor.

8. Celeste: yo diría que [faltan] más detalles.

9. Carina: (*lee la etapa 2 del texto*) toma el lado [de la ecuación] con menos sobres y quita todos los sobres.

10. Elisa: ¿y qué sucede con el otro lado de la ecuación? ¡Eso no dice que tienes que quitar (*José interviene diciendo lo mismo*) la misma cantidad del otro lado!

La crítica es señalada sobre la copia del otro grupo (ver Figura 8, derecha).

Mientras tanto, el otro grupo hace una lectura crítica del grupo de Elisa. Luego los dos grupos se encuentran y, por turnos, presentan sus sugerencias y críticas (ver Figura 9). Entre las críticas que ofrece el grupo de Elisa al otro grupo (el grupo de Walton y David) está el de no indicar que las operaciones deben realizarse sobre los dos lados de la ecuación, y que la obtención de la respuesta no es clara:

11. Walton: quitamos 3 tarjetas aquí (*señala el pasaje en su hoja; ver Figura 9, izquierda*).

12. Carina: tú debías haber dicho “y también 3 tarjetas del otro [lado]”.

13. Celeste: “da la respuesta”.

14. Elisa: ¿cómo das la respuesta? (*ver Figura 9, derecha*).

15. Carina: ¿cómo? ¿Qué respuesta?

Figura 9. La discusión entre los dos grupos de estudiantes.
Fuente: archivo del autor.

Como vemos, el examen crítico del texto del otro grupo, así como la discusión entre los grupos, es la ocasión para aprender más *juntos*. En esta parte de la actividad de enseñanza-aprendizaje, como en la primera (líneas 1-7), se producen otros procesos de objetivación y subjetivación que profundizan el aprendizaje.

Síntesis

En la primera parte de este capítulo presenté la concepción del pensamiento algebraico en la teoría de la objetivación e hice un esbozo de algunos resultados a los que hemos llegado en nuestras investigaciones respecto a la generalización de secuencias. La segunda parte giró en torno a la enseñanza-aprendizaje de ecuaciones. Los episodios discutidos nos permiten ilustrar lo que queremos decir con aprendizaje como un *encuentro colectivo* con las matemáticas.

Primero, las matemáticas se desvelan a la conciencia de los estudiantes no como un simple saber externo, formal, sino como *una posibilidad cultural* que se *materializa* o *encarna* en un contenido concreto polifacético en ese movimiento sensible y sensual que le da vida y que no es ni más ni menos que la actividad de enseñanza-aprendizaje. En esta actividad de enseñanza aprendizaje tanto los estudiantes como el profesor aprenden unos de los otros, y las matemáticas se desvelan en su propia lógica polivalente; por ejemplo, pensar la idealidad matemática por medio de ejemplos precisos como hace José, por medio de su generalidad discursiva, como sugiere el grupo de Elisa, o como combinación de ambos, como lo hacen David y Walton. Segundo, se trata de un encuentro que ofrece la posibilidad de entrar en contacto con otras voces y perspectivas, no en aras de un beneficio personal sino de la creación de

una obra (una idea) común. Se trata de un encuentro con otras voces y perspectivas a través del cual los estudiantes y la profesora se implican en comparaciones, distinciones y tomas de posición respecto al saber, lo cual genera nuevas ideas en el camino, a la vez que todos se constituyen como subjetividades.

Referencias

Davydov, V. V. (1975a). Logical and psychological problems of elementary mathematics as an academic subject. En L. Steffe (Ed.), *Children's capacity for learning mathematics. Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, Vol. 7 (pp. 55-107). Stanford, CA: School Mathematics Study Group.

Davydov, V. V. (1975b). The psychological characteristics of the "prenumerical" period of mathematical instruction. En L. Steffe (Ed.), *Children's capacity for learning mathematics. Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, Vol. 7 (pp. 109-205). Stanford, CA: School Mathematics Study Group.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2007). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach.* New York: Springer Verlag.

Ivashova, O. (2011). The history and the present state of elementary mathematical education in Russia. In A. Karp & B. Vogeli (Eds.), Russian mathematics education. Programs and practices (pp. 37-80). New York: World Scientific.

Kieran, C. (1989). A perspective on algebraic thinking. En G. Vergnaud, J. Rogalski y M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Vol 2* (pp. 163-171). París: PME.

Kieran, C. (1990). A procedural-structural perspective on algebra research. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 245-253). Assisi, Italy: PME.

Panossian, M., de Sousa, M. y de Moura, M. (2016). Conceptual nexuses of algebraic knowledge: A study form the starting point of the historic and the logical movement. *RIPEM*, *6*(2), 36-53.

Peirce, C. S. (1958). *CP = Collected Papers, vol. I-VIII*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, *6*(4), 117-133.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, y I. Segovia (Eds.), *Investigación en didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada: Editorial Comares.
Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277.
Radford, L. (2017). La fenomenología del significado. En Costa dos Santos, M. J., y F. Vieira Alves (Eds.), *Docêncai, cognição e aprendizagem: Contextos diversos* (pp. 15-29). Curitaba: Editora CRV.
Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.). *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 3-25). New York: Springer.
Radford, L. (2021a). Davydov's concept of the concept and its dialectical materialist background. *Educational Studies in Mathematics*, *106*, 327-342.
Radford, L. (2021b). *The theory of objectification. A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*. Leiden y Boston: Brill/Sense.
Rideout, B. (2008). *Pappus reborn. Pappus of Alexandria and the changing face of analysis and synthesis in late antiquity*. Master of Arts in History and Philosophy of Science: University of Canterbury.
Viète, F. (1983). *Introduction to the analytic art*. (trad. R. Witmer). New York: Dover.
Unguru, S. (1975). On the need to rewrite the history of Greek mathematics. *Archive for the History of Exact Sciences*, *15*, 67-114.